

جزوه آمار گن ریاضی

متن حاضر شامل دوره ای از بحث تابع و انواع تابع و
حد و پیوستگی و مشتق است که جهت آمادگی بیشتر دانشجویان
محترم برای شروع درس ریاضی یک تهیه شده است.

* رابط

اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند آنگاه $A \times B$ مجموعه همه
زوجهای مرتبی است که مؤلفه اول آن از A و مؤلفه دوم آن از B
است.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

مثال اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, *, 4, 5\}$ آنگاه

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in \{1, 2, 3\} \text{ و } y \in \{2, *, 4, 5\}\}$$

$$= \{(1, 2), (1, *), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, *), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, *), (3, 4), (3, 5)\}$$

در حالت کلی اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند و زیر مجموعه دلخواه
از $A \times B$ را یک رابط از A به B یا از A در B می نامیم و

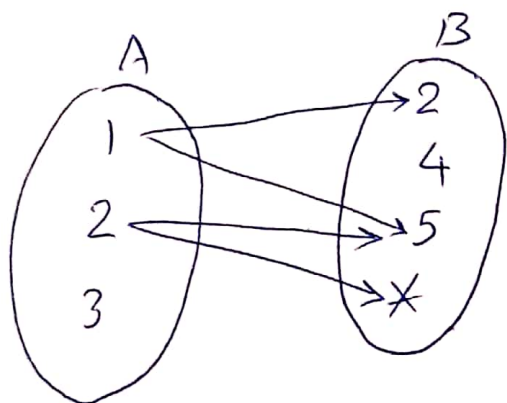
در حالت خاص اگر $A = B$ می گوئیم یک رابط در A یا رابط در A است.
 A مجموعه شروع یا آغاز رابط و B مجموعه پایانی یا انجام رابط
می نامیم.

(۲)

واضح است که در مثال بالا هیچ مجموعه A داریم 3 عضو و مجموعه B 4 عضو دارد مقدار زده‌ها در $A \times B$ برابر $3 \times 4 = 12$ می‌باشد.

بنابراین 2^{12} زیرمجموعه برای $A \times B$ وجود دارد و بنابراین 2^{12} رابطه از A به B یا از A در B موجود است.

نمونه مثال
 $R = \{(1, 2), (1, 5), (2, *), (2, 5)\}$
 یک رابطه از A به B در مثال بالا است، می‌توان رابطه حقوق را به صورت زیر نمایش داد



اگر R رابطه از A به B باشد در این صورت برای هر (x, y) در R می‌توانیم x یا y در رابطه R است و یا می‌توانیم xRy و همچنین می‌توانیم y تصویر x از x تحت رابطه R است. مثلاً در این مثال چون $(1, 2) \in R$ می‌توانیم $1R2$ و یا 2 تصویر 1 تحت رابطه R است.

۱ یا 2 در رابطه است و می‌توانیم

همچنین عناصری از A که در این رابطه شرکت کرده‌اند را دامنه رابطه R می‌نامیم و با نماد $D_R(A)$ (یا A) می‌نویسیم و عناصری از B که در این رابطه شرکت دارند را برد رابطه R می‌نامیم و با

۲

نمودار R_R را خالص می‌دهیم

$$D_R = \{x \in A \mid x \text{ در رابطه با } B \text{ است}\}$$

$$= \{x \in A \mid \exists y \in B \text{ که } xRy\}$$

$$R_R = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ که } xRy\}$$

$$= \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ که } xRy\}$$

در مثال فوق

$$D_R = \{1, 2\}, R_R = \{2, 5, *\}$$

در حالت خاص اگر R را به ازای A به B باشد منظور این است که

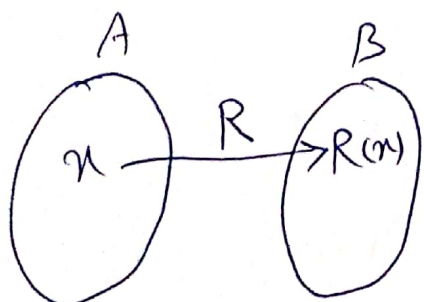
از آنجا که A در رابطه R شرکت کرده باشد یعنی $D = A$ باشد.

تایید هر عنصر A با یک و فقط یک عضو B داشته باشد R را یک

تابع از A به B می‌نامیم و با نمودار

$R: A \rightarrow B$ یا $A \xrightarrow{R} B$ نشان می‌دهیم.

واضح است که اگر R یک تابع باشد در این صورت برای هر عنصر x در A یک و فقط یک عضو y در B وجود دارد که xRy باشد. نمودار $R(x)$ نشان می‌دهیم.

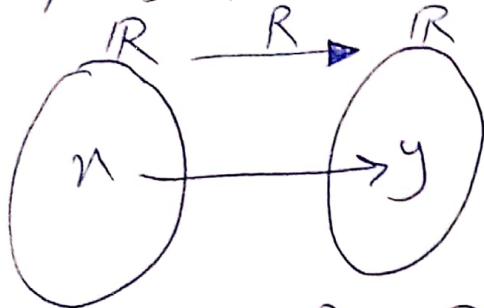


۴

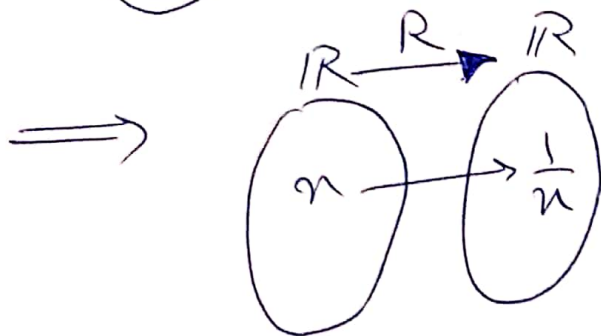
در مثال بالا R تابع نیست زیرا اولاً $n=3$ عضو A هیچ
 عضو B ندارد (یا هیچ عضو B را n نگذارد) و ثانیاً $n=1$
 دو عضو در B دارد یعنی IR^2 و IR^5 .

مثال ۱ اگر R رابطه‌ای از مجموعه 'اعداد حقیقی' به مجموعه 'اعداد حقیقی'
 R درون مجموعه 'اعداد حقیقی' یک رابطه باشد (فرض شود به صورت زیر)

$$R = \{(n, y) \mid n \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, ny = 1\}$$



$$nRy \Rightarrow ny = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{n}$$



آیا R تابع است؟

جواب: R تابع نیست، زیرا برای هر عضو مجموعه 'اعداد حقیقی'
 تصویر در مجموعه 'اعداد حقیقی' در حالتی برای $n=0$ هیچ تصویر
 موجود

در مجموعه 'اعداد حقیقی' موجود نیست.

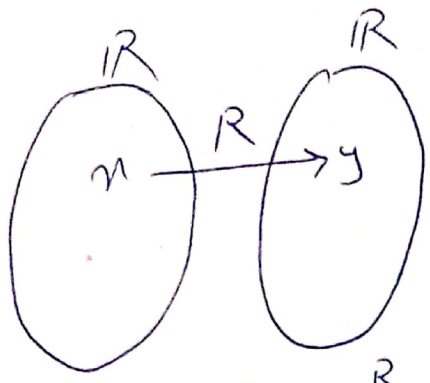
مثال ۲ اگر R رابطه‌ای از مجموعه 'اعداد حقیقی' به مجموعه 'اعداد حقیقی' باشد (فرض شود به صورت زیر)

$$R = \{(n, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid n = y^2\}$$

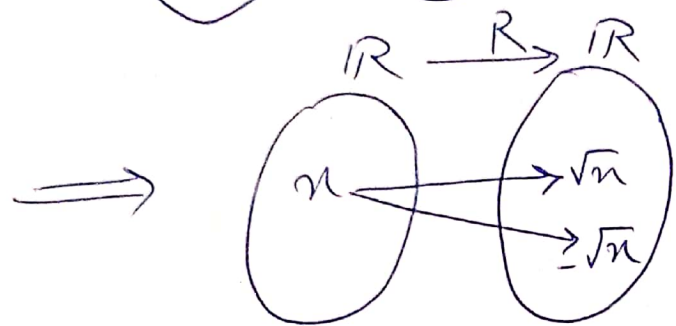
$\mathbb{R}^2$

آیا R تابع است؟

6



حوا ۱
 $x R y \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x}$



R تابع نیست زیرا اولاً برای هر $x < 0$ مثلاً $x = -3$ مقصوره در مجموعه اعداد حقیقی وجود ندارد زیرا $\sqrt{-3}$ عدد حقیقی نیست

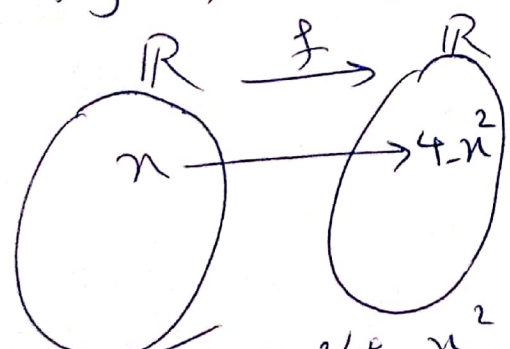
مجموعه اول دقیقاً باید عضو مجموعه دوم را به دست بدهد که در این مثال بینیم $x R \sqrt{x}$ و $x R (-\sqrt{x})$.

مثال ۱ اگر $A=B=\mathbb{R}$ باشد آیا f با دستور زیر یک تابع بر مجموعه اعداد حقیقی است؟

$x f y \Leftrightarrow x^2 + y = 4$

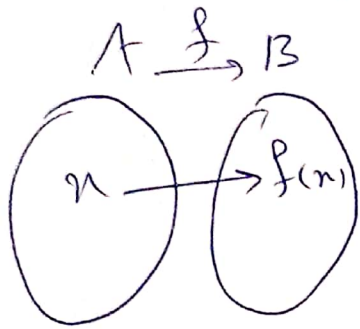
حل ۱

$x f y \Rightarrow x^2 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x^2 \Rightarrow$



برای هر x در $\mathbb{R}$ ، مقصوره $4 - x^2$ به دست می آید که موجود است بنابراین f تابع از $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (تابع روی $\mathbb{R}$) است.

⑤ قرارداد نگارش اثر f تابع از A به B باشد طبق تعریف تابع
 برای هر عضو x در A یک و یکتا یک y در B موجود است
 این y را $f(x)$ می‌نامیم و f را تابع $f(x)$ می‌نامیم.
 و تابع f را به صورت زیر نشان می‌دهیم.



$$f: A \rightarrow B \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} A & \xrightarrow{f} & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix} \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} A & \xrightarrow{f} & B \\ y & = & f(x) \end{matrix}$$

التم در بیشتر موارد تنها ضابطه تابع f عین $y = f(x)$ را ذکر می‌کنند
 و یا متن دامنه تابع را به خواننده واگذار می‌کنند.

مثال ادامه نتایج زیر را مشخص کنید.

$$y = 4 - x^2$$

$$D_y = \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{1+x}$$

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid 1+x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$1+x=0 \Rightarrow x=-1$$

$$y = \sqrt{4-x^2}$$

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid 4-x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$$

$$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

نکته: در نامساوی $|x| \leq a$ از این مطلب استفاده کردیم که برای هر $a > 0$ ،

$$|x| \leq a \equiv -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \equiv x \geq a \text{ یا } x \leq -a$$

⑦

صید مثال ۱ تابع

۱- تابع صید

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) = a_n n^n + a_{n-1} n^{n-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

یک صید از درجه n (بیشترین توان n) با ضرایب a_i است.

مثال ۱

$$f(n) = 4n^5 + 3n^2 - 1$$

است $n=5$

$$f(n) = \underbrace{4 \times n^5}_{a_5} + \underbrace{0 \times n^4}_{a_4} + \underbrace{0 \times n^3}_{a_3} + \underbrace{3 \times n^2}_{a_2} + \underbrace{0 \times n}_{a_1} - \underbrace{1}_{a_0}$$

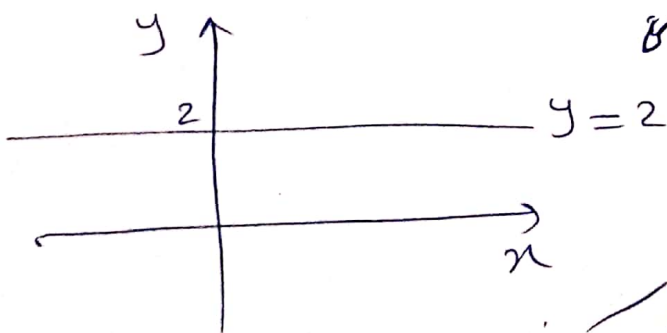
واضح است که دامنه صید صیدها، مجموعه اعداد حقیقی است.

۲- تابع ثابت یا تابع

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) = k$$

مثال ۲ $y=2$



در واقع $y=2$ تابع ثابت یک صید از درجه صفر است.

۳- تابع کسری یا تابع توانی، تابعی که خارج قسمت دو صید است.

$$f(n) = \frac{p(n)}{q(n)} \quad \text{که } p(n) \text{ و } q(n) \text{ هر دو صید هستند}$$

واضح است که دامنه تابع توانی f هم اعداد حقیقی غیر صفر است.

$$D_f = \{n \in \mathbb{R} \mid q(n) \neq 0\}$$

① $f(n) = \frac{n^3 - 4n + 1}{n^2 - 5n - 6}$ مطابق مثال ۱

$D_f = \{n \in \mathbb{R} \mid n^2 - 5n - 6 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{6, -1\}$

$n^2 - 5n - 6 = 0 \Rightarrow n = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \begin{matrix} \rightarrow 6 \\ \rightarrow -1 \end{matrix}$

نکته: در این مثال از این مطلب استفاده کردیم که

$an^2 + bn + c = 0 \Rightarrow n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

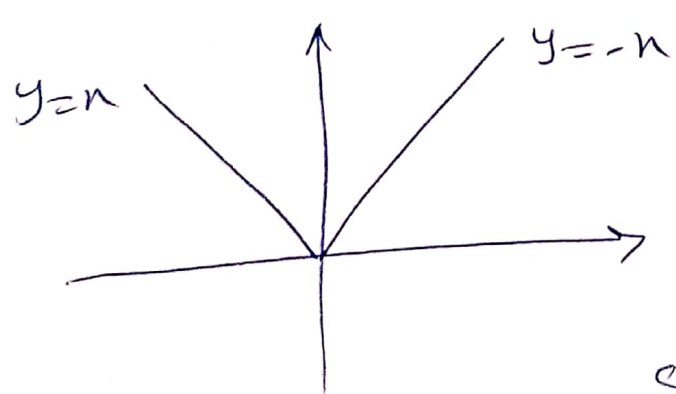
$f(n) = \sqrt[n]{n}$ ۴- تابع ریشه

$n = 2, 3, 4, \dots$

در این تابع اگر n زوج باشد $D_f = \mathbb{R} = [-\infty, +\infty)$ و اگر n فرد باشد $D_f = \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ۵- تابع قدر مطلق

$f(n) = |n| = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ -n & n < 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$

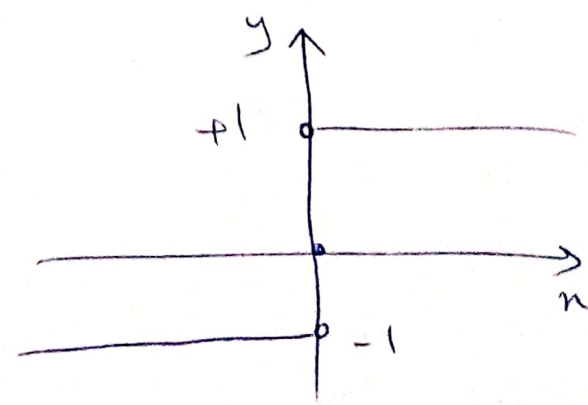


$f(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ -n & n \leq 0 \end{cases}$

Sign ۶- تابع علامت

$\text{Sign}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\text{Sign}(n) = \begin{cases} +1 & n > 0 \\ -1 & n < 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$



۷ - تابع جزء صحیح یا تابع پیراکت $y = [x]$

$$[] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow [x]$$

منظور از پیراکت x یا جزء صحیح x که با علامت $[x]$ یاد می شود
 بزرگترین عدد صحیح نامیستر از x (کوچکتر یا مساوی x) می باشد.
 عبارتی اثر $n < x < n+1$ $n \leq [x] < n+1$ (یک عدد صحیح) آنگاه $[x] = n$ می باشد.

مثلاً مثال $[2.5] = 2$ زیرا $2 \leq 2.5 < 3$ و $[-3.7] = -4$ زیرا
 $-4 \leq -3.7 < -3$ و $[2] = 2$ و $[-4] = -4$.

خواص است که بدایم

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$$0 \leq x - [x] < 1$$

$$x - 1 < [x] \leq x$$

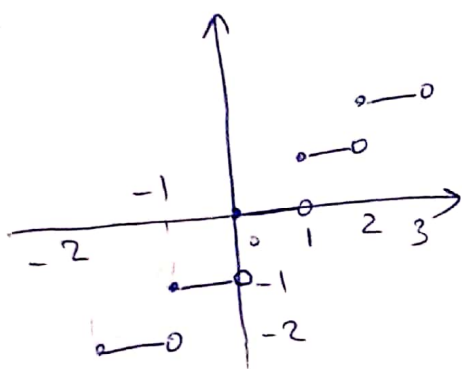
و اثر k یک عدد صحیح باشد آنگاه

$$[x + k] = [x] + k$$

$$[x + 3] = [x] + 3$$

$$[x - 4] = [x] - 4$$

مثلاً مثال



① تابع صعودی یا نزولی را بنویس

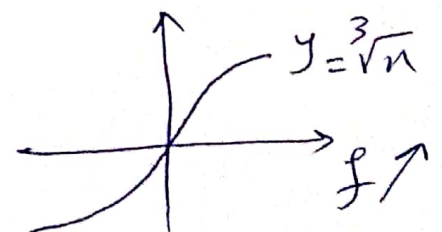
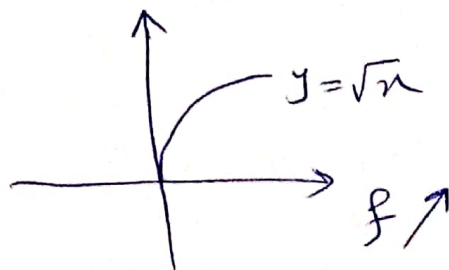
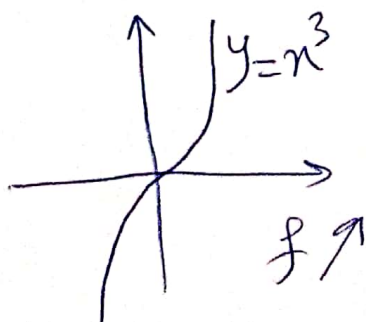
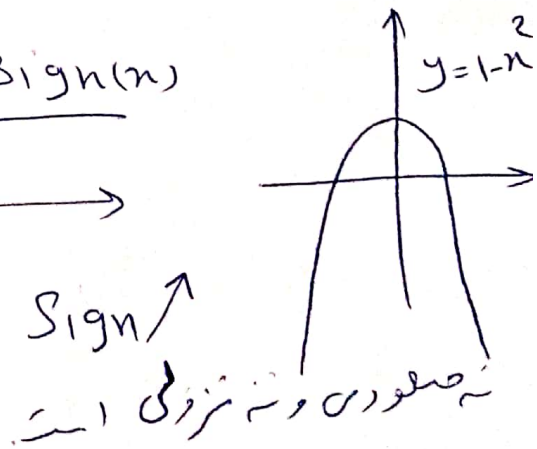
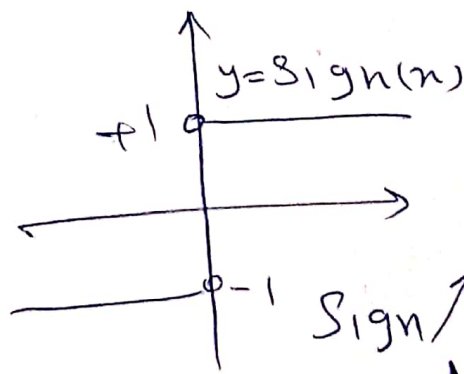
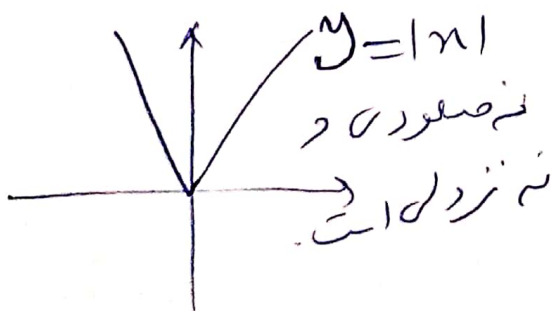
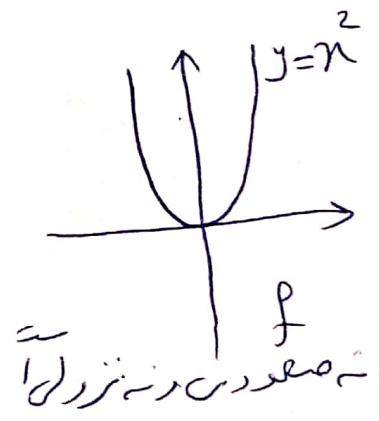
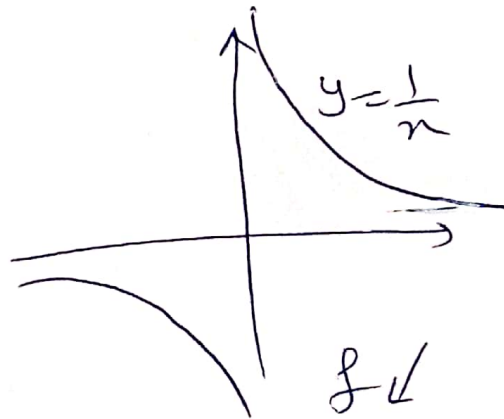
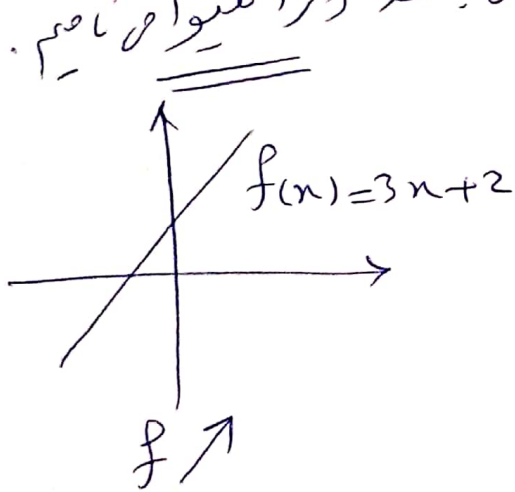
تابع $f: A \rightarrow B$ را صعودی می‌گوئیم در صورتی که f حتماً
برای هر n_1, n_2 در A

$$n_1 > n_2 \implies f(n_1) \geq f(n_2)$$

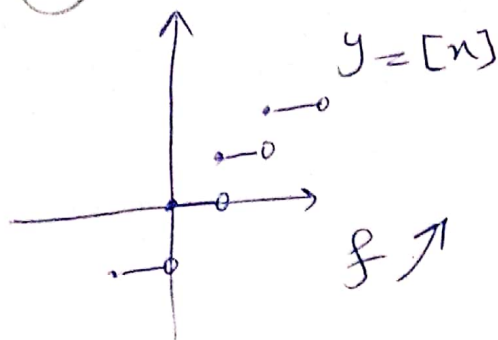
یعنی با افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع نیز افزایش می‌یابد
رابطه عکس اگر برای هر n_1, n_2 در A

$$n_1 > n_2 \implies f(n_1) \leq f(n_2)$$

آنگاه f را نزولی می‌نامیم و می‌نویسیم $f \downarrow$.
فرصت دارید که صعودی یا نزولی باشد یا راکتیو نامیم.



11



عزیز

$$n_1 > n_2 \Rightarrow f(n_1) > f(n_2)$$

f را اکیدا صعودی می نامیم.
رابطه

$$n_1 > n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)$$

f را اکیدا نزولی می گوئیم.

آثر f اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است، f را اکیدا گنیوا می گوئیم.

در مثالها $y = 3x + 2$ تابع $y = x^3$ و $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt[3]{x}$ اکیدا صعودی و تابع $y = \frac{1}{x}$ اکیدا نزولی است.

2) تابع متناوب

عزیز، عدد حقیقی مانند T موجود باشد بطوریکه برای هر x در دامنه f داشته باشیم $f(x+T) = f(x)$ در این صورت f را تابع

متناوب و T را یک دوره تناوب تابع می گوئیم. واضح است

که اگر T یک دوره تناوب تابع باشد آنگاه

$$\pm 2T, \pm 3T, \pm 4T, \dots$$

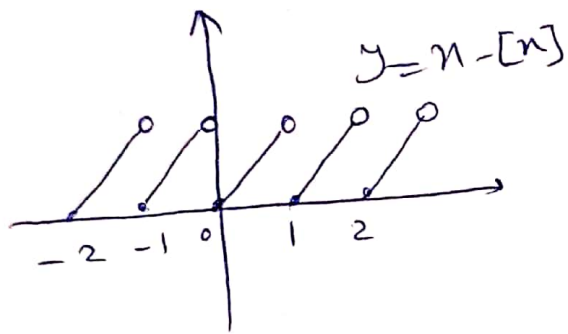
و kT (k یک عدد صحیح) هکل دوره تناوب برای تابع می باشد، کوچکترین دوره تناوب مثبت تابع متناوب را در صورت وجود دوره تناوب اصلی تابع می نامیم.

(12)

مثلاً، مثال همه توابع مثلثی (که خواص عددی را دارند) توابع
متناوب می باشند و همچنین تابع زیر یک تابع متناوب با دوره متناوب
اصلی $T=1$ است.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow n - [n]$$



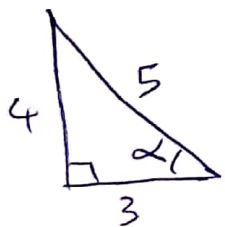
برای هر عدد صحیح k داریم

$$f(n+k) = (n+k) - [n+k]$$

$$= n+k - [n] - k = n - [n] = f(n)$$

بارزترین نمونه توابع متناوب، توابع مثلثی می باشند.

توابع مثلثی عبارتند از: $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$, $\sec$, $\csc$
(سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت، سکانت، کسکانت)



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5} \quad D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5} \quad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1, 1]$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{4}{3}$$

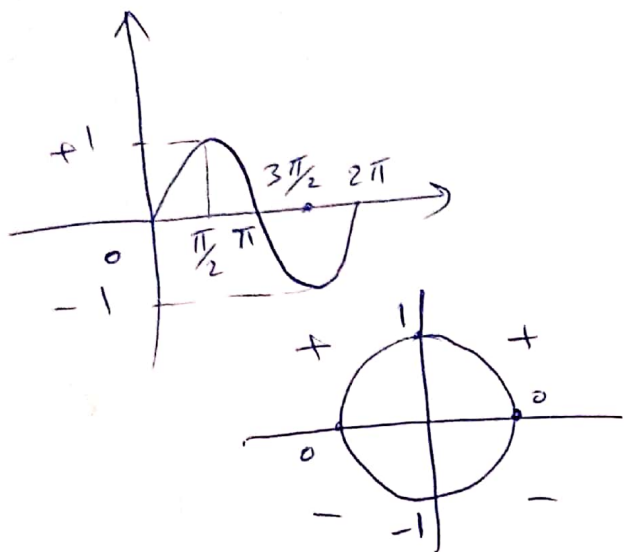
$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{3}{4}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{5}{3}$$

$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{5}{4}$$

(۱۳)

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

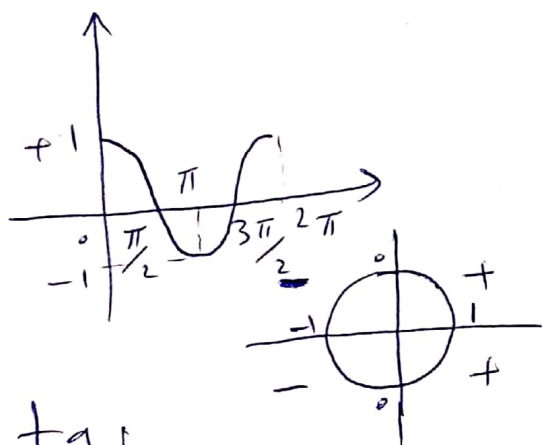


در حالت مکرر، $\sin$ تابعی بر مجموعه
اعداد حقیقی با برد $[-1, 1]$ است
و دوره تناوب اصلی آن 2π
می باشد بنابراین

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$

بنابراین نمودار $\sin$ را در طول
یک دوره تناوب آن (یعنی
در $[0, 2\pi]$ رسم می کنیم.

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$



اصل
دوره تناوب و این تابع نیز
 2π است بنابراین دوره تناوب
آن در حالت مکرر $2k\pi$ می باشد یعنی

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$$

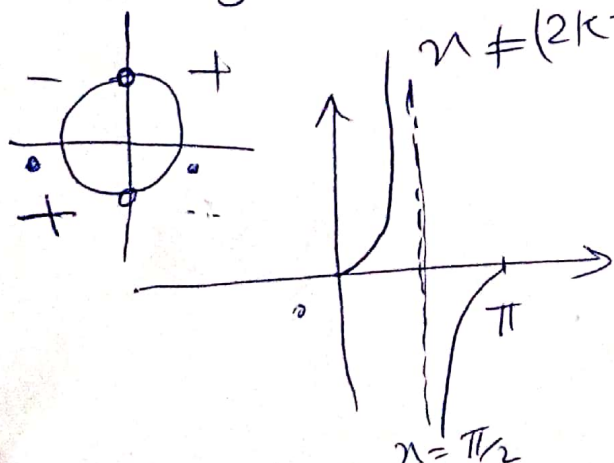
برابری است

$\tan$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\mathcal{D}_{\tan} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$



دوره تناوب این تابع
 π می باشد پس در طول
یک دوره تناوب آن (یعنی
در $[-\pi/2, \pi/2]$ نمودار رسم می شود.

در شکل می بینیم که $\tan$ در هر دوره تناوب
خود تابعی اکیدا صعودی است.

11) c.tg

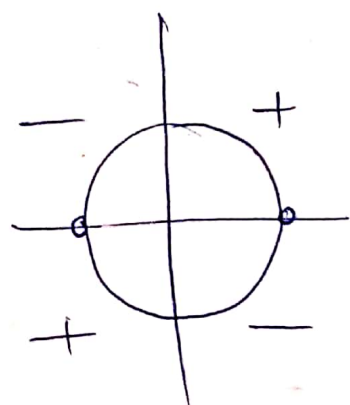
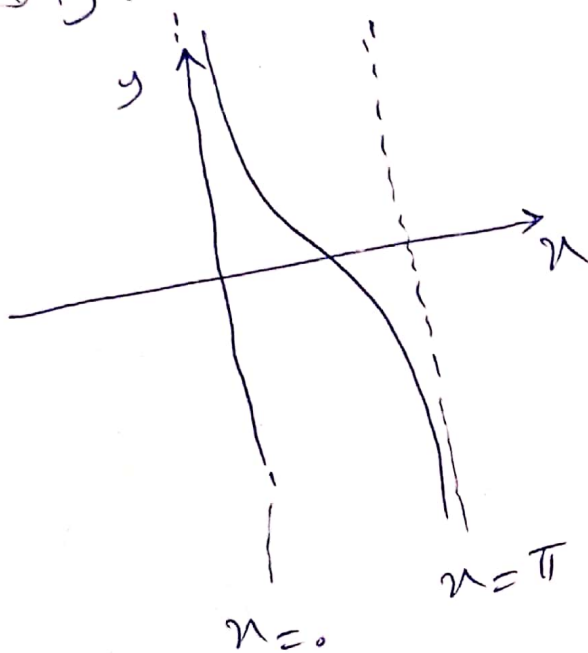
$$c.tg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$D_{c.tg} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\}$$

دو شاخه است این تابع نیز مانند tg ، $x \neq k\pi$ ، $x = k\pi$ است.

$$c.tg(x + k\pi) = c.tg(x)$$

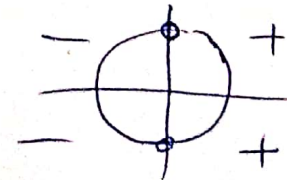
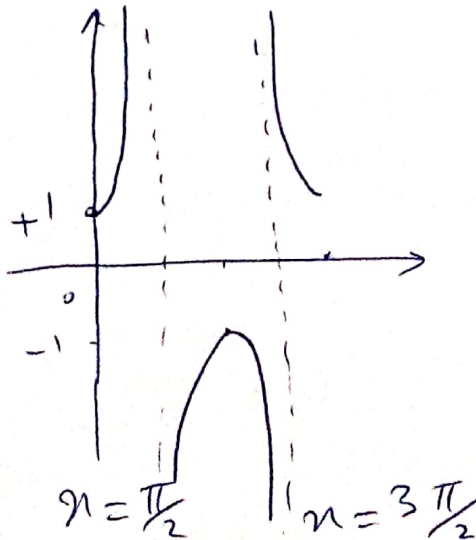
تابع $c.tg$ ، در هر دو درجه شاخه
خود اکثراً نزولی است.



$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$D_{\sec} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\} = D_{tg} = \mathbb{R} - \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots\}$$

واضح است که دو شاخه $\sec$ عمده
دو شاخه $\cos$ ، برابر $2k\pi$
می باشد پس خود را در طول یک
درجه شاخه بین $[0, 2\pi]$ رسم می شود.

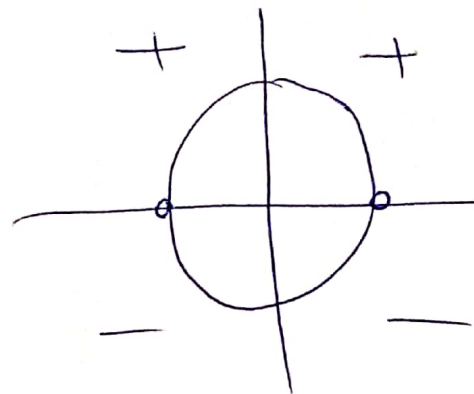
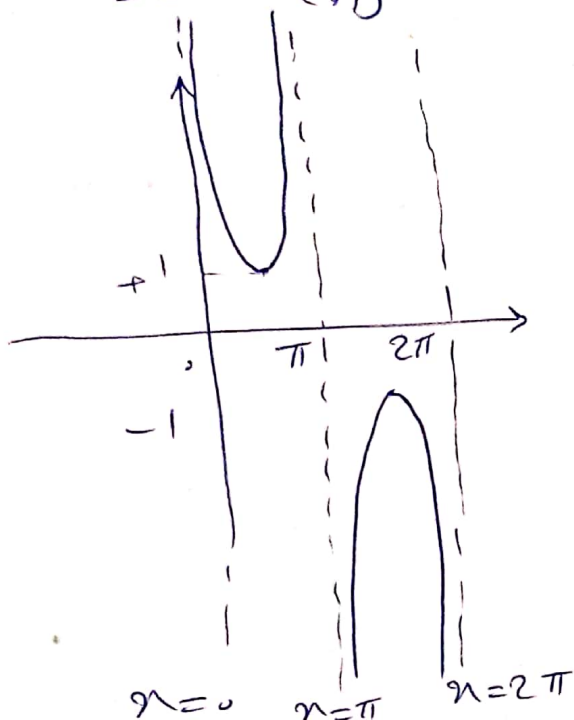


16) CSC :

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$D_{\csc} = D_{\sin} = \mathbb{R} - \{\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\}$$

دوره تناوب تابع CSC هم ۲π است
تناوب Sin بین ۲Kπ



صیغه اتحاد و مشتقات

$$1) \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$2) \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$3) \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

$$4) \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}, \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

$$5) \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$6) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$7) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

$$8) \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$9) \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$10) |\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$$

(۱۷)

۳. تابع کرانه دار

اگر عدد حقیقی m ، M (جدا) باشد که برای هر $n \in \mathbb{D}$ داشته باشیم

$$m \leq f(n) \leq M$$

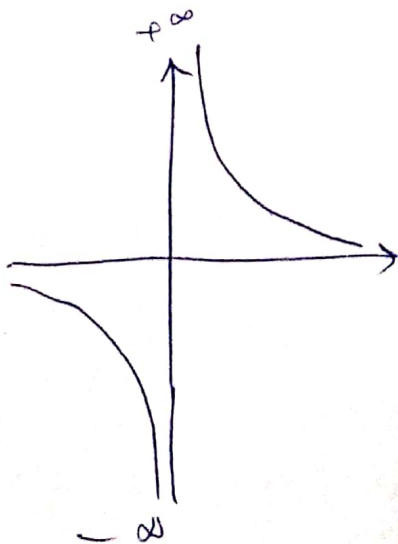
در این صورت f را یک تابع کرانه دار و m یک کران پایین و M یک کران بالا نامیده می شود و یا می توان چنین گفت که f کرانه دار است اگر عدد حقیقی مثل L موجود باشد که

$$|f(n)| \leq L$$

بطور مثال $|\sin(n)| \leq 1$ و $|\cos(n)| \leq 1$ پس توابع $\sin$ و $\cos$ محدود کرانه دارند.

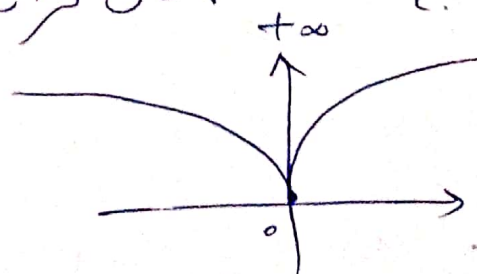
مثال تابع $y = \frac{1}{1+n^2}$ کرانه دار است

$0 < \frac{1}{1+n^2} \leq 1$
 یک کران بالا و یک کران پایین تابع



مثال $y = \frac{1}{n}$ کرانه دار نیست.

مثال تابع $y = \sqrt[3]{n^2}$ کرانه دار نیست.



(۱۷)

۴- تابع زوج، تابع فرد

آر تابع f (صفا) آنکه برای هر $n \in D_f$ ، $-n$ هم عضو D_f باشد و دامنه f متقارن باشد، داریم:

تابع زوج نام f هرگاه برای هر $n \in D_f$ ،

$$f(-n) = f(n)$$

در عکس آر برای هر $n \in D_f$ ،

$$f(-n) = -f(n)$$

تابع فرد نام f

بطور مثال دیدیم که تابع $y = \cos(n)$ یک تابع زوج، تابع $y = \sin(n)$ تابع فرد باشد.

$$* y = \frac{1}{1+n^2}$$

مثال ۱

$$f(-n) = \frac{1}{1+(-n)^2} = \frac{1}{1+n^2} = f(n) \Rightarrow f \text{ زوج}$$

$$* y = \frac{|1-n^2|}{2n}$$

$$f(-n) = \frac{|1-(-n)^2|}{2(-n)} = \frac{|1-n^2|}{-2n} = -\frac{|1-n^2|}{2n} = -f(n) \Rightarrow f \text{ فرد}$$

$$* y = \frac{|n|}{1+n^3}$$

$$f(-n) = \frac{|-n|}{1+(-n)^3} = \frac{|n|}{1-n^3}$$

$f(-n) \neq f(n)$
 $f(-n) \neq -f(n)$

۱۸ $\Rightarrow$ تابع زوج و فرد

* $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 1 = x^4 - x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$ زوج

* $f(x) = x^4 - 3x + 1$

$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x) + 1 = x^4 + 3x + 1$

تابع زوج و فرد است.

در حالت کلی عوایل لزوج یا لزوج فرد نیست ولی می توان
نشان داد که عوایل به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد
قابل نمایش است.

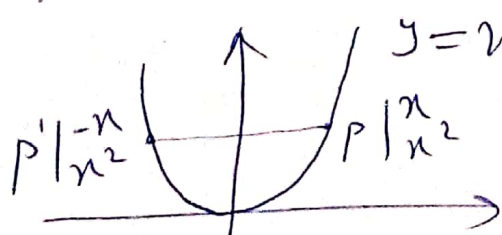
$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{فرد}}$$

* $f(x) = \sqrt{x}$

دامنه تابع $y = \sqrt{x}$ مقدار اعداد منفی را شامل است پس متقارن نیست

بنابراین هم زوج و هم فرد (برای این تابع مطرح نیست).

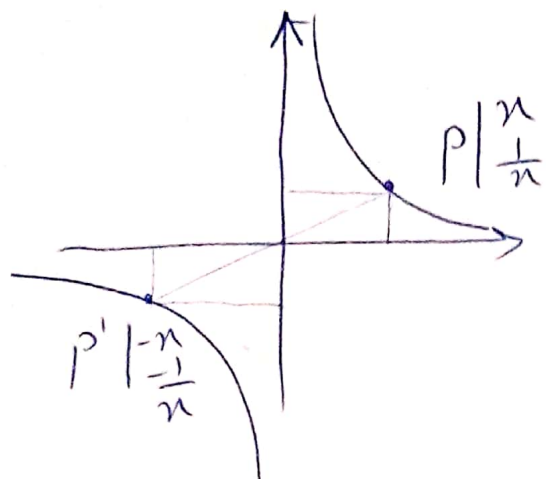
قابل ذکر است که اگر تابع زوج باشد نمودار آن نسبت به
محور y عموماً متقارن است.



و اگر فرد باشد نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

14

$$y = \frac{1}{x}$$



one to one

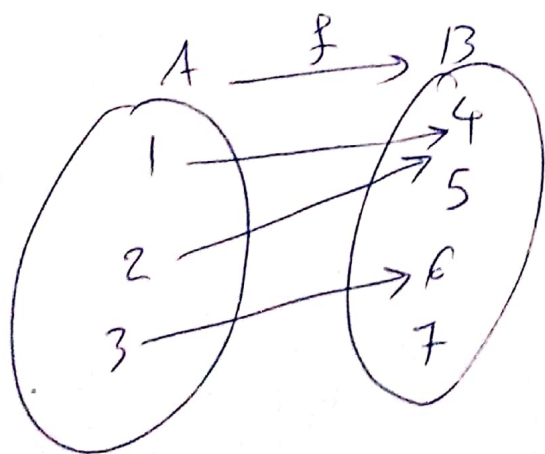
تابع یک به یک

تابع $f: A \rightarrow B$ را یک به یک می نامیم، هرگاه تصویر هر دو عضو متمایز دامنه، از هم متمایز باشد. عبارتش برای n_1, n_2 در دامنه تابع f

$$n_1 \neq n_2 \implies f(n_1) \neq f(n_2)$$

و یا

$$f(n_1) = f(n_2) \implies n_1 = n_2$$



تصور مثال، در تابع f در $f(1) = f(2)$ و $1 \neq 2$ پس f یک به یک نیست.

$$f(-2) = f(2) \\ |-2| = |2|$$

و یا $y = |x|$ ، تابع یک به یک نیست

و یا تابع $y = x^2$ ، یک به یک نیست

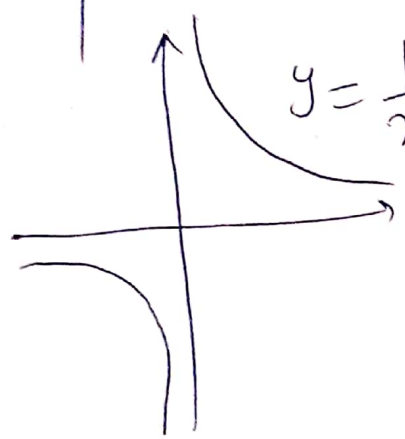
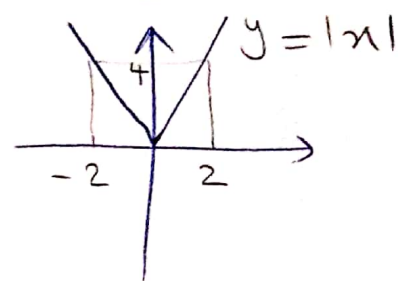
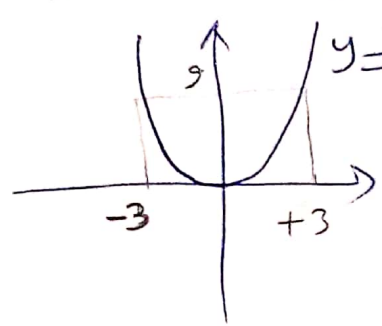
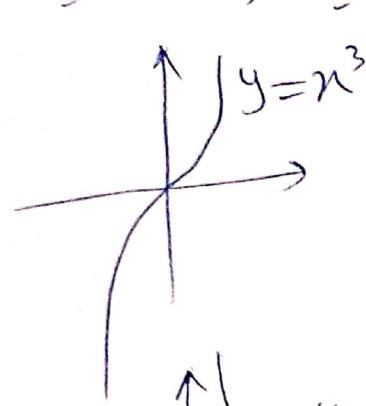
$$f(3) = 9, f(-3) = 9, 3 \neq -3$$

۲.

تابع $y = x^3$ یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

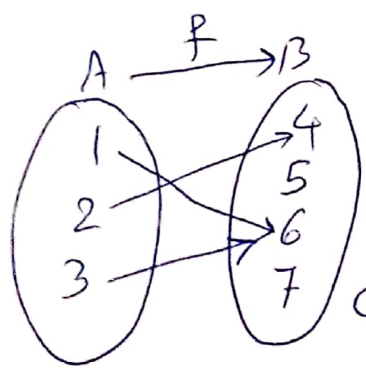
و واضح است که هر تابع اکیدا صعودی و همصن و اکیدا نزولی یک به یک است.



$y = \frac{1}{x}$ یک به یک است (اکیدا نزولی)

۸- تابع f پوشا و onto

تابع $f: A \rightarrow B$ را پوشا می‌نامیم هرگاه هر عضو B ، تصویر عضوی از A باشد به عبارتی $R = B$.



معمولاً در تابع f پوشا نیست زیرا عناصری که دیده می‌شود 5 و همصن 7 تصویر هیچ عضوی از A نیستند.

نمونه مثال: $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ پوشا است.
 $f(x) = \sin(x)$

و یا $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty]$ پوشا است.
 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

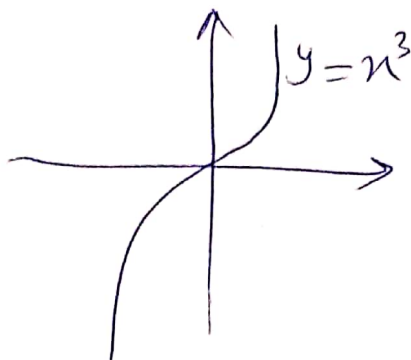
(۲۱)

۶- تناظر دوسویں

اگر f ہم کی ایک دوسری جیسا ہے f راستا تناظر دوسویں میں نامم.

مثال: $f(n) = n^3$ کی تناظر دوسویں است.

* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(n) = n^3$



* $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$

$f(n) = \tan(n)$

f ایک آسنٹوٹس ہے کی ایک
 از طرفی و شایسته (مطابق خود)
 $R_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

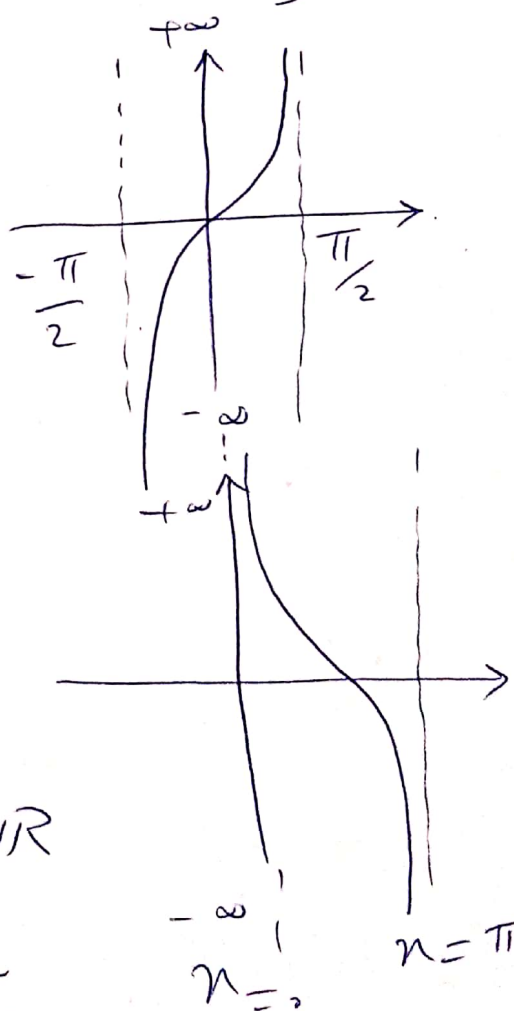
* $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$f(n) = \cot(n)$

f ایک آسنٹوٹس ہے کی ایک و طرفی
 $R_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ میں ہے است.

تاریخ $\tan$ و $\cot$ در $\mathbb{R}$ کی دور
 تار خود تناظر دوسویں اند.

کی تناظر دوسویں است.

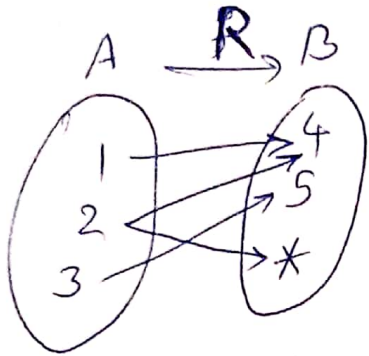


(۲۲)

۷- تابع وارو نه یر

اثر $R: A \rightarrow B$ کیه رابطه R نه وارو رابطه R نه وارو

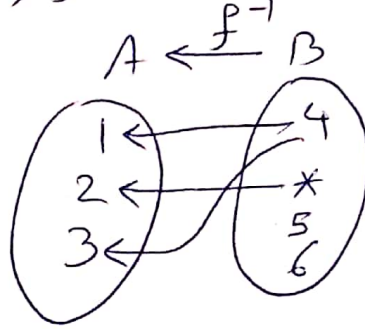
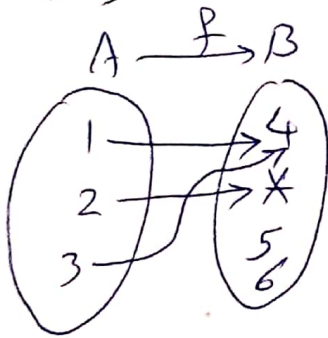
$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} = \text{مکوس رابطه } R \\ = \text{وارو رابطه } R$$



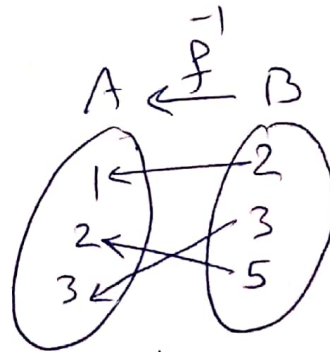
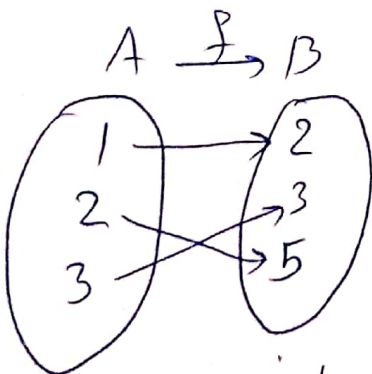
$$R = \{(1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 5)\}$$

$$R^{-1} = \{(4, 1), (4, 2), (5, 2), (5, 3)\}$$

در صورتی که $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد طبق یک وارو f نه یر
کیه تابع f نه وارو A وارو نه یر یا مکوس نه یر نه نام



طبق مثال در شکل
و بر و f نه یر است
اما وارو f نه یر
نیست.



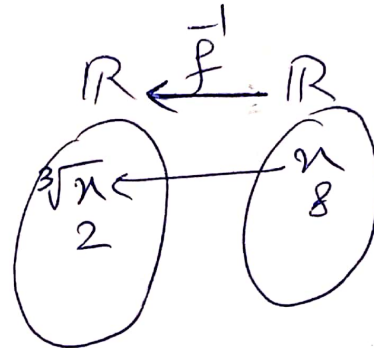
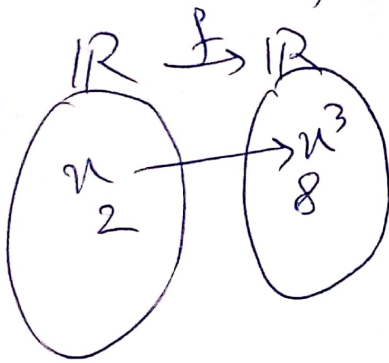
در مثال بالا f و f^{-1} هر دو تابعند، در این صورت f وارو
نه یر یا مکوس نه یر نه نام.

$$D_{f^{-1}} = R_f, \quad R_{f^{-1}} = D_f$$

۲۲ ثابت شود f وارفتنی است اگر و تنها اگر یک به یک و پوشش باشد

با عبارت تناظر دوسوی باشد مانند $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3$$



$$2 \xrightarrow{f} 8$$

$$\xleftarrow{f^{-1}}$$

اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: A \rightarrow B$ در تابع باشند و $f+g$ و $f \pm g$ و $\frac{f}{g}$ و λf (یک ضرب ثابت) هم تابع باشند.
عبارت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم و ضرب ثابت یک تابع است

$$f+g: A \rightarrow B$$

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

$$f-g: A \rightarrow B$$

$$(f-g)(n) = f(n) - g(n)$$

$$f \cdot g: A \rightarrow B$$

$$(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$$

$$\frac{f}{g}: D \rightarrow B$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \left\{ n \in \mathbb{R} \mid n \in D_f \cap D_g, g(n) \neq 0 \right\}$$

و واضح است که $\frac{f}{g}$ تابع f و g است.
 مخرج بین و را از دامن حذف کرد.

$$\lambda f: A \rightarrow B$$

$$(\lambda f)(n) = \lambda f(n)$$

مثلاً اگر $f(n) = n^2$ و $g(n) = \sin(n)$ در این صورت

$$(f+g)(n) = n^2 + \sin(n)$$

$$(25) (f \cdot g)(n) = n^2 \sin(n)$$

$$(f \times g)(n) = n^2 \sin(n)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(n) = \frac{n^2}{\sin(n)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{n \in D_g \mid g(n) = 0\}$$

مانند ذکر است که

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$g(n) = 0 \Rightarrow \sin(n) = 0 \Rightarrow n = k\pi \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\}$$

و همچنین اثر f و g ، و تابع باشند بطوریکه

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$\searrow \quad \nearrow$$

$$g \circ f$$

تعریف می کنیم $g \circ f(n) = g(f(n))$
(و) را ترکیب دو تابع و نامش به عبارتی

$$n \xrightarrow{f} f(n) \xrightarrow{g} g(f(n)) \quad g \circ f: A \rightarrow C$$

$$n \rightarrow g(f(n))$$

بطور مثال اثر $f(n) = n^2 + 1$ و $g(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ، و تابع باشند آنگاه
تابع $g \circ f$ ، چنین است

$$n \xrightarrow{f} n^2 + 1 \xrightarrow{g} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$$

$$\searrow \quad \nearrow$$

$$g \circ f$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g \circ f(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$$

(27)

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n^2 + 1) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$$

$$n \xrightarrow{f} f(n) \xrightarrow{g} g(f(n))$$

واضح است

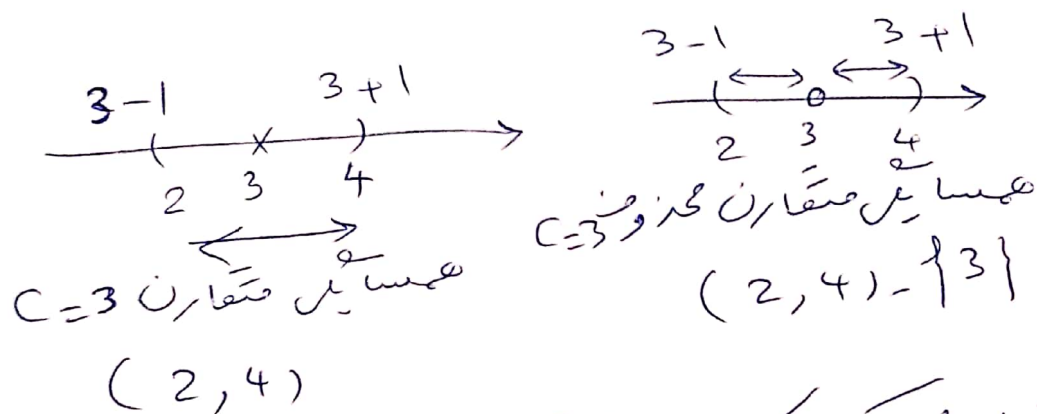
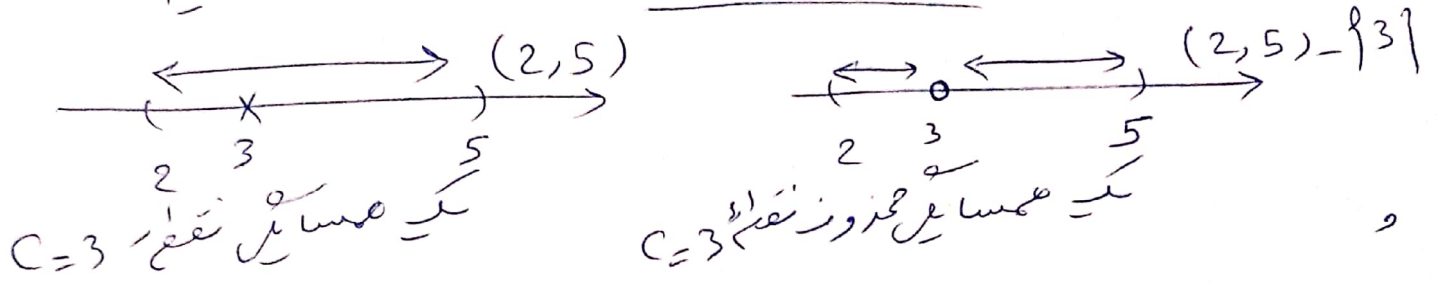
$$D_{g \circ f} = \{n \in D_f \mid f(n) \in D_g\}$$

$$n \xrightarrow{g} g(n) \xrightarrow{f} f(g(n))$$

$f \circ g$

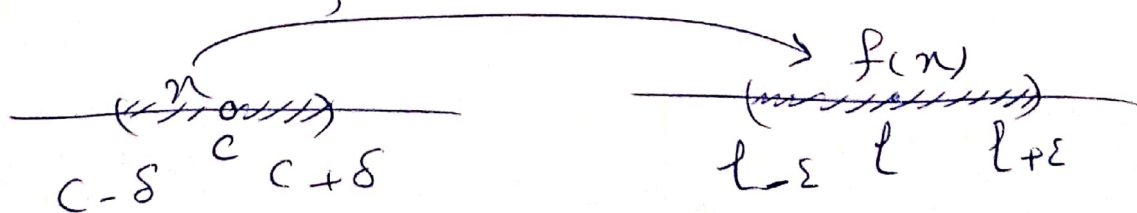
$$f \circ g(n) = f(g(n)) = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + 1$$

اگر C یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل نقطه C ، یک همسایه C می نامیم
 C می نامیم بطور مثال بازه $(2, 5)$ یک همسایه نقطه $C=3$ است و
 $\{3\} - (2, 5)$ ، یک همسایه حذف نقطه $C=3$ می نامیم.



اگر تابع f چنان باشد که در یک همسایه حذف نقطه C تعریف شده باشد، عدد حقیقی l را حد تابع f در C می نامیم و می نویسیم
 $\lim_{x \rightarrow C} f(x) = l$

هرگاه، اگر n اندازه کافی به نقطه C نزدیک شود مقدار تابع $f(n)$ به حد حقیقی l نزدیک شود.



بطور مثال در تابع $y = x^2 + 1$ اگر متغیر x عدد $C=2$ نزدیک شود تابع به عدد 5 نزدیک می شود و اصطلاحاً می نویسیم

(۲۸)

حد تابع f در $c=2$ برابر ۵ است در صورتی که $\lim_{n \rightarrow 2} x^2 + 1 = 5$ می‌باشد.
 قابل ذکر است که در تعریف حد، متغیر باید بتواند تا حاد شدن
 نقطه c نزدیک شود و $c \neq n$ باشد، در واقع رفتار تابع در
 نزدیک نقطه c (در اطراف نقطه c) مطرح است نه خود نقطه c ،
 و گاهی نقطه c ، اصلاً در دامنه تابع f نباشد. مثلاً در تابع
 $y = \frac{\sin(n)}{n}$ ، $n=0$ جزو دامنه تابع نیست ولی اگر متغیر n
 به عدد $c=0$ نزدیک شود، دیده می‌شود که مقدار تابع به
 عدد $l=1$ نزدیک می‌شود در این حالت است که می‌گوییم

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = 1$$

حد مقیاس از حد

① حد تابع در صورت وجود منحصر بفرد است.

* $\lim_{n \rightarrow c} k = k$ حد تابع ثابت با مقدار c برابر است

②

* $\lim_{n \rightarrow c} n^n = c^n \quad n=1, 2, 3, \dots$

* $\lim_{n \rightarrow c} a_n n^n + a_{n-1} n^{n-1} + \dots + a_1 n + a_0 =$

$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$

* $\lim_{n \rightarrow c} \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{c}$ البته بشرط آنکه n زوج باشد،
 باید $c > 0$ باشد.

(۲۹)

$$\lim_{n \rightarrow c} \sin(n) = \sin(c)$$

$$\lim_{n \rightarrow c} \cos(n) = \cos(c)$$

$$\lim_{n \rightarrow c} \tan(n) = \tan(c)$$

$$\lim_{n \rightarrow c} \cot(n) = \cot(c)$$

$$\lim_{n \rightarrow c} \sec(n) = \sec(c)$$

$$\lim_{n \rightarrow c} \csc(n) = \csc(c)$$

جبر حدود
 (۳) اگر توابع f و g در نقطه c دارای حد باشند آنگاه
 توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ (به شرط آنکه $g \neq 0$)
 و $(\lim_{n \rightarrow c} g(n) \neq 0)$ ، λf (λ ضرب ثابت) نیز در c حد دارند و

$$\lim_{n \rightarrow c} (f \pm g)(n) = \lim_{n \rightarrow c} f(n) \pm \lim_{n \rightarrow c} g(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow c} (f \times g)(n) = \lim_{n \rightarrow c} f(n) \times \lim_{n \rightarrow c} g(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow c} \left(\frac{f}{g} \right)(n) = \left(\lim_{n \rightarrow c} f(n) \right) / \left(\lim_{n \rightarrow c} g(n) \right)$$

البته به شرط آنکه $\lim_{n \rightarrow c} g(n) \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow c} (\lambda f)(n) = \lambda \lim_{n \rightarrow c} f(n)$$

(۲)

طوری که

$$\lim_{n \rightarrow 0} n^2 + 1 - 3 \sin(n) = 0^2 + 1 - 3 \sin(0) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \pi/2} \frac{n^2 + 1}{\sin(n)} = \frac{\pi^2 + 1}{\sin(\pi/2)} = \frac{1 + \pi^2}{1} = 1 + \pi^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \pi/4} 2 \tan(n) = 2 \lim_{n \rightarrow \pi/4} \tan(n) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \pi/6} \sqrt[3]{n} \sec(n) = \lim_{n \rightarrow \pi/6} \sqrt[3]{n} \lim_{n \rightarrow \pi/6} \sec(n) =$$

$$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{\pi} \times 2}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{\pi} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3^5}}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 3n + 2} = A$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} n^2 - 2n + 1 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow 1} n^2 - 3n + 2 = 0$$

$$\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 3n + 2} = \frac{(n-1)^2}{(n-1)(n-2)} = \frac{n-1}{n-2}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n-1}{n-2} = \frac{0}{1-2} = 0$$

و همچنین اگر f و g دو تابع قابل ترکیب باشند طوری که

$$n \xrightarrow{f} f(n) \xrightarrow{g} g(f(n))$$

$\xrightarrow{g \circ f}$

③

فرض کنید f و g در c محدود باشند و $\lim_{n \rightarrow c} f(n) = u$ و $\lim_{n \rightarrow c} g(n) = l$

آنگاه $\lim_{n \rightarrow c} g \circ f(n) = l$ است. (نکته: g در l محدود باشد)

$$\lim_{n \rightarrow 1} \sin\left(\frac{\pi}{2}n - \pi\right)$$

مثال ۱

$$n \xrightarrow{f} \frac{\pi}{2}n - \pi \xrightarrow{g} \sin\left(\frac{\pi}{2}n - \pi\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\pi}{2}n - \pi = \frac{\pi}{2} \times 1 - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin(n) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$n \xrightarrow{f} \frac{\pi}{2}n - \pi \xrightarrow{g} \sin\left(\frac{\pi}{2}n - \pi\right)$$

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow$
 $1 \quad -\frac{\pi}{2} \quad -1$

$g \circ f$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 1} g \circ f(n) = -1$$

④ اگر توابع f و g در c محدود باشند و $\lim_{n \rightarrow c} f(n) = 0$ و $\lim_{n \rightarrow c} g(n) = 0$ آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow c} f(n) \times g(n) = 0$$

مثال ۱

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sqrt[3]{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$n \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{0} = 0$$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq 1$$

(۱۲۲) . $\lim_{n \rightarrow c} |f(n)| = |l| \cdot \lim_{n \rightarrow c} f(n) = l$ اگر $\lim_{n \rightarrow c} f(n) = l$ و $l \neq 0$

مثال

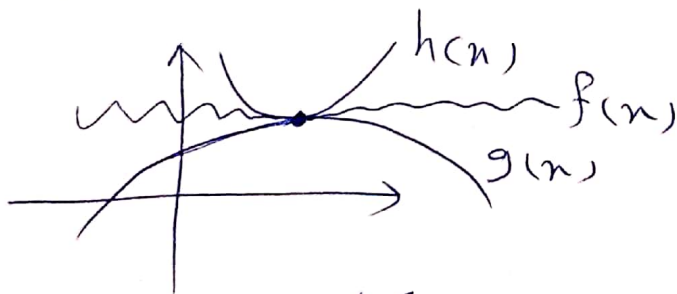
$$\lim_{n \rightarrow 2} \left| \frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 - n - 2} \right| = A$$

$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 - n - 2} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{(n-2)(n-3)}{(n-2)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n-3}{n+1} = \frac{2-3}{2+1}$$

$$= -\frac{1}{3} \Rightarrow A = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

→ مقیاس انفرادی یا مقیاس L اندوخت
اگر $f(n) \leq g(n) \leq h(n)$ و $\lim_{n \rightarrow c} f(n) = \lim_{n \rightarrow c} h(n) = L$ و $g(n) \leq f(n) \leq h(n)$ باشد

$$\lim_{n \rightarrow c} f(n) = \lim_{n \rightarrow c} h(n) = L$$



$$\lim_{n \rightarrow c} f(n) = l$$

مثال ۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\frac{1}{n} \right]$$

چون n^2 به سمت نامتناهی می‌رود و $\frac{1}{n}$ به سمت صفر می‌رود، پس $n^2 \left[\frac{1}{n} \right]$ به سمت نامتناهی می‌رود.

$$\frac{n^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right)}{1 - n^2} < n^2 \left[\frac{1}{n} \right] < n^2 \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right)}{1 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n}{1 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

ما می بینیم که تابع f (چنانچه) است که فرمول محاسبه f تابع برای نقاط
قبل از c ، نقاط بعد از c با هم متفاوت است مانند تابع $y = [x]$
در نزدیکی هر عدد صحیح، در این صورت برای محاسبه حد تابع در
حین نقاطی که از هر یک محاسبه $\rightarrow$ و حد است، حد را می بینیم.

اگر $x \rightarrow c^+$ ، $x > c$ می نویسیم $x \rightarrow c^+$
اگر $x \rightarrow c^-$ ، $x < c$ می نویسیم $x \rightarrow c^-$

و واضح است که با توجه به منحصراً در هر (مقدار) حد در یک نقطه،

در هر دو حالت باید جواب یکسان بدهیم (نویسیم)
 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
بطور مثال $\lim_{n \rightarrow \infty} [n] = ?$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} [n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$
 $n \rightarrow +\infty$
 $0 < n < 1 \Rightarrow [n] = 0$

$\lim_{n \rightarrow -\infty} [n] = \lim_{n \rightarrow -\infty} -1 = -1$
 $n \rightarrow -\infty$
 $-1 < n < 0 \Rightarrow [n] = -1$

در $c=0$ این تابع حد ندارد
 $\lim_{n \rightarrow c^+} f(n) = f^+(c)$
 $\lim_{n \rightarrow c^-} f(n) = f^-(c)$

بطور مثال تابع $y = [x]$ در هیچ عدد صحیحی حد ندارد
و همچنین ما می بینیم که f فقط در یک طرف نقطه c
تعریف شده است و مجبور هستیم فقط حد یک طرفه را بنویسیم
بطور مثال $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \sqrt{0} = 0$ ، تابع $\sqrt{x}$ برای مقادیر کمتر از
صفر تعریف نشده است

۸ - حد ها نامتناهی یا حد بی نهایت
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ ، $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
وجود ندارد

(۳۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \pm \infty \quad (\alpha > 0)$

خط $n=c$ را جانب تمام نمودار تابع معلوم می‌کند. دست کم یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$\lim_{n \rightarrow c^+} f(n) = +\infty$ یا $\lim_{n \rightarrow c^-} f(n) = +\infty$ یا $\lim_{n \rightarrow c} f(n) = +\infty$

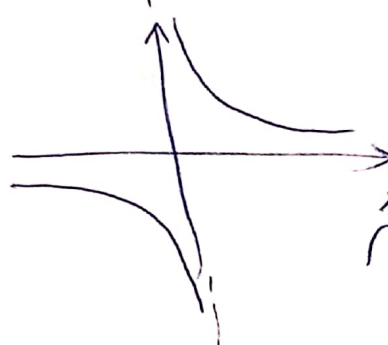
نمودارها

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

$n \rightarrow +\infty$

$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} = -\infty$

$n \rightarrow -\infty$



خط $n=0$ را

محور و تمام جانب تمام نمودار تابع معلوم می‌کند

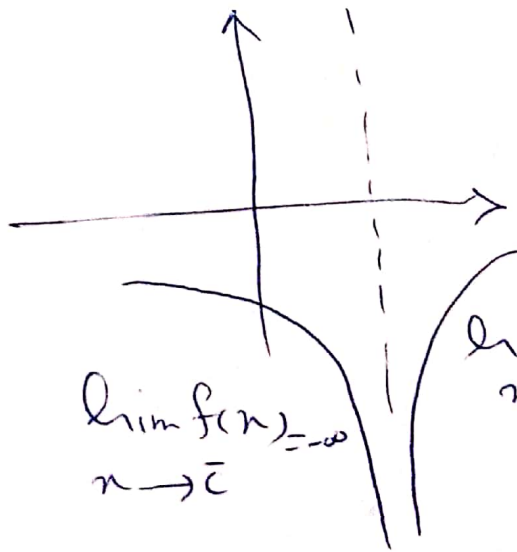
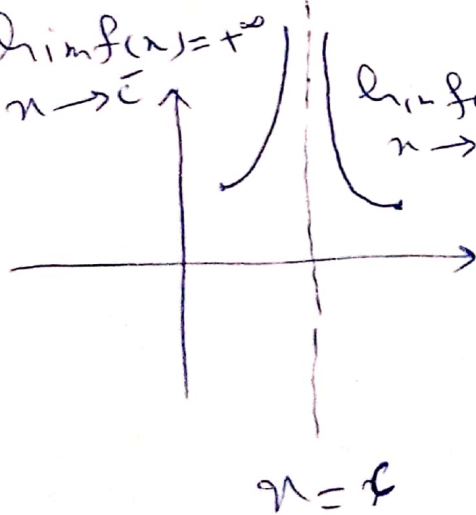
$\lim_{n \rightarrow \bar{c}} f(n) = +\infty$

$n \rightarrow \bar{c}$

$\lim_{n \rightarrow c^+} f(n) = +\infty$

$n \rightarrow c^+$

مسلوباً برای نشان دادن خط مجانب از خواص استفاده می‌شود.



$\lim_{n \rightarrow \bar{c}} f(n) = -\infty$

$n \rightarrow \bar{c}$

$\lim_{n \rightarrow c^+} f(n) = -\infty$

$n \rightarrow c^+$

(۲۸)

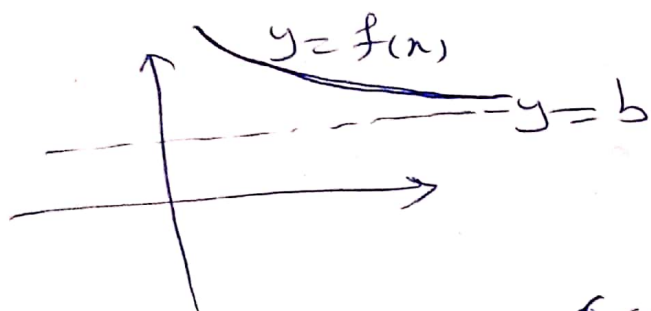
۹- حد در بی نهایت

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$$

$$n \rightarrow \pm \infty$$

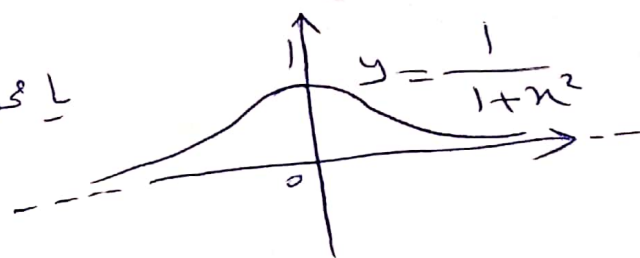
افتر
خط $y=b$ را مخالف افتر خودار تابع می نامیم و با ∞ دست کم یکی از $\pm$ را ∞ برقرار باشد،
 $\lim$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = b \quad \perp \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = b \quad \perp \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$$



مُبر مثال در تابع $y = \frac{1}{1+n^2}$ داریم

خط $y=0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \pm \infty} f(n) = 0$
یا محور n مخالف افتر خودار تابع است.



۱۰- حد بی نهایت در بی نهایت

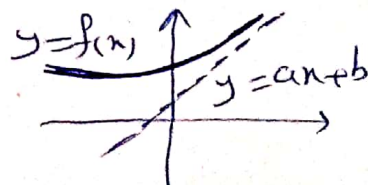
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$$

در توابع مانده $y = \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}$ ، بیشترین توان n در صورت با بیشترین توان n در مخرج در حالت $n \rightarrow +\infty$ ، هم مقایسه می شود.

آر تاج در $+\infty$ در آن خط مخالف افتر باشد که در آن مخالف مایل است، اگر خط $y=an+b$ مخالف مایل تابع باشد در $+\infty$ در این صورت مقادیر a و b با فرض اول زیر محاسبه می شود.

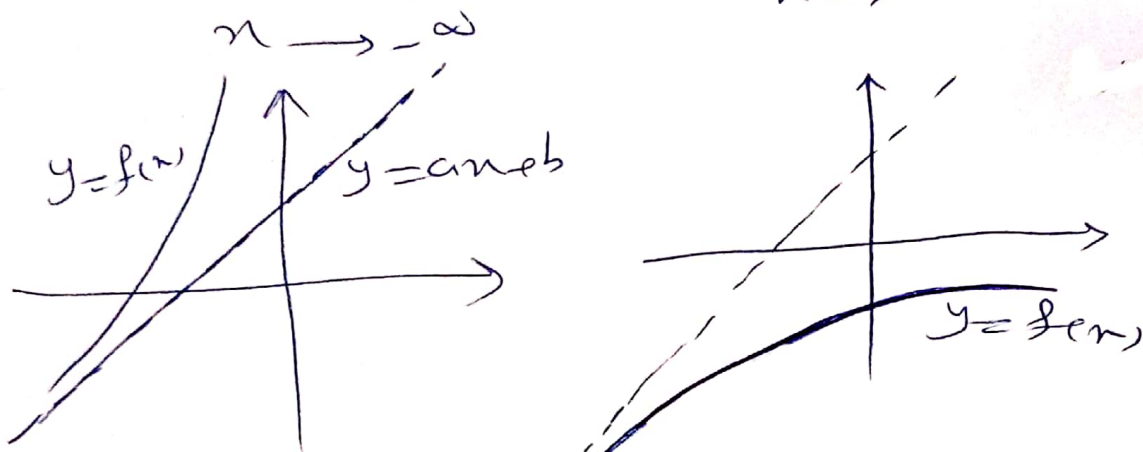
$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n}$$

$$b = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) - an$$



در صفحه ۳۳۸، آسکر در $-\infty$ دارای مجانب افقی باشد، مجانب مایل (امکان وجود)
 برای نمودار تابع را جستجو کنید پس این اثر خط
 مجانب مایل نمودار تابع باشد اگر آنگاه.

$$a = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{f(n)}{n}, \quad b = \lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) - an$$



مثال اول: خط مجانب نمودار تابع $y = \frac{n^2-1}{2n}$ را تعیین کنید.

حل: $\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{n^2-1}{2n} = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n^2-1}{2n} = +\infty$ پس خط

$n=0$ محور y ها مجانب قائم نمودار تابع است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$$

و نمودار مایل: $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n^2-1}{2n} = -\infty$ پس مجانب افقی ندارد.

ارحوا $y = an + b$ مجانب مایل باشد پس

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2-1}{2n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - an = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{2n} - \frac{1}{2}n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1-n^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2n} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = an + b = \frac{1}{2}n$$

(۳۷)

در $y = \frac{n}{2}$ محاسبه مایل خود را تابع در $\pm \infty$ است.

میگویند

تابع f در نقطه $c \in \mathbb{D}_f$ پیوسته می باشد اگر $\lim_{n \rightarrow c} f(n) = f(c)$.

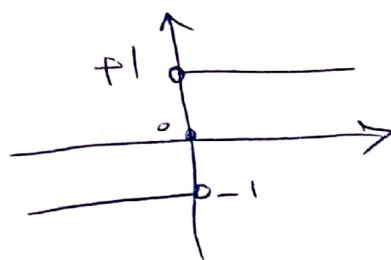
در حالتیکه $\lim_{n \rightarrow c^+} f(n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow c^-} f(n)$ یعنی $f^+(c) = f^-(c) = f(c)$ می گوئیم f در c از راست پیوسته است.

در حالتیکه $\lim_{n \rightarrow c^-} f(n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow c^+} f(n)$ یعنی $f^-(c) = f^+(c) = f(c)$ می گوئیم f در نقطه c از هر دو جهت پیوسته است. اگر f در تمام نقاط مجموعه I پیوسته باشد می گوئیم f در I پیوسته است.
 مثال: $\lim_{n \rightarrow 0} [n] = 0 = [0] \Rightarrow c = 0$ تابع $[n]$ در $c = 0$ از راست پیوسته است.
 $\lim_{n \rightarrow 0^+} [n] = 0 = [0]$
 $\lim_{n \rightarrow 0^-} [n] = -1$

طبق مطالب تابع جزء صحیح در همه اعداد صحیح ناپیوسته است و از راست پیوسته است.

Sign: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Sign}(n) = \begin{cases} +1 & n > 0 \\ -1 & n < 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$



مثال ۱

$$\left. \begin{aligned} f^+(.) &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \text{Sign}(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ f^-(.) &= \lim_{n \rightarrow 0^-} \text{Sign}(n) = \lim_{n \rightarrow 0^-} -1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = 0 \text{ در } f \text{ از راست و چپ پیوسته نیست.}$$

$$f(n) = \begin{cases} n^2 \sin(\frac{1}{n}) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

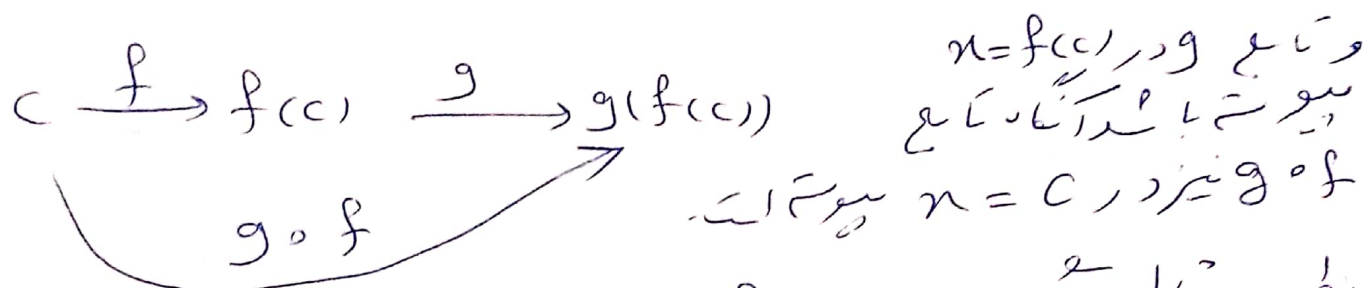
مثال ۲

$$\lim_{n \rightarrow 0} n^2 \sin(\frac{1}{n}) = 0 = f(0) \Rightarrow \text{در } n = 0 \text{ پیوسته است}$$

کمرانندار

① همه توابع ثابت و حیدر و صلیبات و کسری و ریشه و توان
رو و راضی و خور پیوسته اند.

② اگر توابع f و g عدد در $n=c$ پیوسته باشند آنگاه $f \pm g$ و fg
و g/f و $f \cdot g$ (ضرب ثابت) عدد در c پیوسته اند.
عمیقاً اگر f و g توابع قابل ترکیب باشند بطوریکه تابع f در $n=c$



بطور مثال اگر $f(n) = \cos(n)$ و $g(n) = \sqrt[3]{n}$ آنگاه

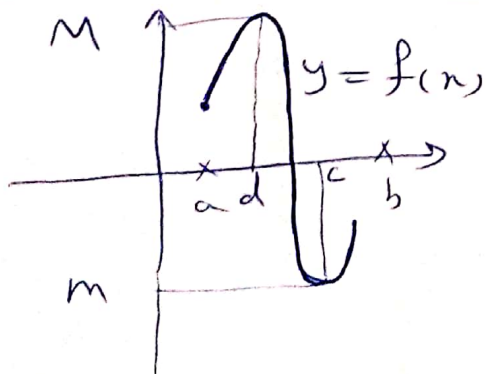
$$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(\cos(n)) = \sqrt[3]{\cos(n)}$$

و عدد پیوسته است و این نیز پیوسته است.

③ اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه f بر این بازه ماکزیمم و
مینیمم دارد. بنابراین در نقطه در بازه c و d وجود دارد بطوریکه
برای هر $n \in [a, b]$

$$f(c) \leq f(n) \leq f(d)$$

ماکزیمم f روی بازه M مینیمم f روی بازه m



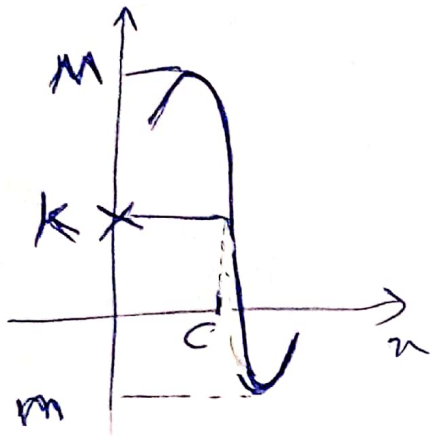
④ اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

پیوسته باشد در این صورت
 f تمام مقادیر بین مینیمم تا
ماکزیمم خود را اختیار می کند
بطور مثال اگر

$$\min \{f(n) | n \in [a, b]\} = m$$

$$\max \{f(n) | n \in [a, b]\} = M$$

و $m \leq k \leq M$ یک عدد دلخواه بین m و M باشد
 باشد حتماً نقطه‌ای بین a تا b وجود دارد که مقدار تابع در آن نقطه
 برابر با k است.



مثلاً اگر $M=5$ و $m=-2$ (حجم)

$5 > 4 > -2$ حتماً نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $f(c)=4$
 این قضیه را قضیه مقدار میانی می‌نامند.

مشتق

(۴)

مشتق تابع، تابع مشتق پذیر

اگر c نقطه‌ای در دامنه تابع باشد، $\lim_{n \rightarrow c} \frac{f(n) - f(c)}{n - c}$

در صورت وجود مشتق تابع f در $n=c$ ، می‌تواند و با عبار $f'(c)$ یا $\left. \frac{df}{dn} \right|_{n=c}$ نشان داده‌اند.

در صورتیکه $f'(c)$ مساوی باشد، می‌توانیم f در $n=c$ مشتق پذیر است و اگر تابع f در تمام نقاط مجموعه‌ای مشتق پذیر باشد می‌توانیم آن مجموعه مشتق پذیر است.

در صورتیکه $f'(c) = \pm \infty$ فقط می‌توانیم مشتق f در $n=c$ موجود است و لفظ مشتق پذیر را کنار نمی‌بریم. مشتق راست در c

$$f'_+(c) = \lim_{n \rightarrow c^+} \frac{f(n) - f(c)}{n - c}$$

در حد

$$f'_-(c) = \lim_{n \rightarrow c^-} \frac{f(n) - f(c)}{n - c}$$

واضح است که اگر f در $n=c$ مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$$

مقایسه مشتق

①

$$(k)' = 0$$

مشتق اعداد ثابت برابر صفر است

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(4) (\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

(5) اگر توابع f و g هر دو در C مشتق پذیر باشند آنگاه $f \pm g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را نیز در C مشتق پذیرند (ضربیات)

$$(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$$

$$(f \times g)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - g'(c)f(c)}{g^2(c)}$$

$$\begin{aligned} * (4 \sec x - x^3)' &= 4(\sec x)' - (x^3)' \quad \text{با توجه به} \\ &= 4 \sec x \tan x - 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * (x^2 \cos x)' &= (x^2)'(\cos x) + x^2(\cos x)' = \\ &= 2x \cos x + x^2(-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x \end{aligned}$$

$$* \left(\frac{x^2}{3x+1}\right)' = \frac{(x^2)'(3x+1) - (3x+1)'x^2}{(3x+1)^2} =$$

$$\frac{2x(3x+1) - 3 \times x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

$$* \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 2(x^{-1/2})' = 2 \times \frac{-1}{2} x^{-1/2-1} = \frac{-1}{x^{3/2}}$$

(۴)

و علاوه بر آن اگر f و g دو تابع قابل ترکیب متوالی باشند

طوری که f در c و g در $f(c)$ متوالی پذیر باشد
 آنگاه $g \circ f$ نیز در c متوالی پذیر است و داریم
 (قاعده زنجیره‌ای)
 مثال

$$c \xrightarrow{f} f(c) \xrightarrow{g} g(f(c))$$

$$g \circ f$$

$$(g \circ f)'(c) = f'(c) \times g'(f(c))$$

$$\begin{aligned} (tg^3(n))' &= 3tg^2(n) \times (tg(n))' \\ &= 3tg^2(n) \times \sec^2(n) \end{aligned}$$

زیرا

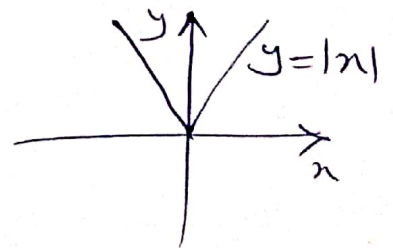
$$\begin{aligned} (tg(n))' &= \sec^2(n) \leftarrow f(n) = tg(n) \\ (n^3)' &= 3n^2 \leftarrow g(n) = n^3 \end{aligned}$$

و تابع $y = tg^3(n)$ ترکیب این دو تابع است.

$$n \xrightarrow{f} tg(n) \xrightarrow{g} (tg(n))^3 = tg^3(n)$$

(۵) اگر f در c متوالی پذیر باشد آنگاه f در c پیوسته است
 f پیوسته است $\Rightarrow f$ متوالی پذیر است

نته اولاً آنکس مقبیه فوق لزوماً صحیح نیست بطور مثال تابع $y = |x|$ در $x=0$ پیوسته است ولی متوالی پذیر نیست.



$$f'_+(0) = \lim_{n \rightarrow +0} \frac{|n| - |0|}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow +0} \frac{n}{n} = 1$$

چون $n < 0 \Rightarrow n \rightarrow -0 \Rightarrow |n| = -n$

$$f'_-(0) = \lim_{n \rightarrow -0} \frac{|n| - |0|}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow -0} \frac{-n - 0}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow -0} \frac{-n}{n} = -1$$

(۴۲) $f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'$ وجود ندارد در $n=0$ پیوسته است.

f پیوسته است $\Rightarrow f$ مشتق پذیر است

تاییداً اینست از عکس نقیض این قضیه استفاده می شود یعنی:

f مشتق پذیر نیست $\Rightarrow f$ پیوسته نیست

مثور مثال تابع

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{sign}(n) = \begin{cases} +1 & n > 0 \\ -1 & n < 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} 1 = 1 \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$$f'_-(0) = \lim_{n \rightarrow 0^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

در $n=0$ حد ندارد $\Rightarrow$ پیوسته نیست پس مشتق پذیر نیست

(۴) اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ برای بازه $[a, b]$ پیوسته در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد، آنگاه

الف) اگر برای هر $c \in (a, b)$ ، f' آنگاه f برای بازه $[a, b]$ اکیداً محدود است.

ب) اگر f آنگاه f اکیداً نزول است.

ج) اگر $f' = 0$ آنگاه f تابع ثابت یا تابع پایه است.

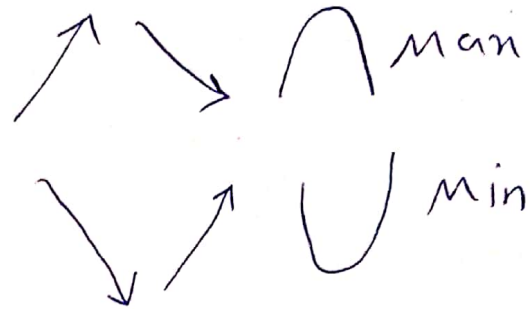
مثال ۱ بازه $[0, 1]$ هر دو نزول تابع زیر را تعیین کنید (جدول تغییرات f را رسم کنید).

$$f(n) = 2n^3 - 9n^2 + 12n$$

$$f'(n) = 6n^2 - 18n + 12 = 6(n^2 - 3n + 2)$$

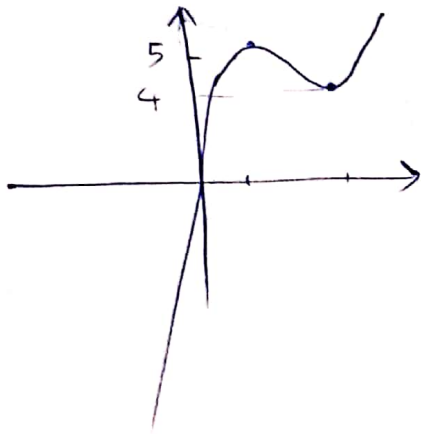
④ $f'(n) = 0 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow n = 1 \leq n = 2$
 $(n-2)(n-1)$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f		↗	↘	↗	
		Max	Min		



$(-\infty, 1)$	$f \nearrow$
$[1, 2]$	$f \searrow$
$[2, +\infty)$	$f \nearrow$

f در نقطه $\left. \begin{matrix} n=1 \\ y=5 \end{matrix} \right\}$ دارای ماکزیمم نسبی است.
 f در نقطه $\left. \begin{matrix} n=2 \\ y=4 \end{matrix} \right\}$ دارای مینیمم نسبی است.



نکته: اگر $c \in D_f$ نقطه برای تابع f
 می‌تویم آنرا $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود باشد
 مطابق جدول فوق (جدول تغییرات تابع f)
 $\left. \begin{matrix} n=1 \\ y=5 \end{matrix} \right\}$ و $\left. \begin{matrix} n=2 \\ y=4 \end{matrix} \right\}$ نقاط برای تابع f اند.

⑤ اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و f بر بازه (a, b) مشتق پذیر
 آنگاه نقطه‌ای مانند c بین a تا b وجود دارد بطوریکه

مقدار میانگین در مشتق

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

بطور مثال: یک مقدار میانگین ثابت کنید برای $\sin(x)$ ؟
 $|\sin(x)| \leq |x|$

$|\sin(\cdot)| \leq 1$
 ≤ 0 ✓

حل آنرا $= 0$ داریم

بر باره [و ۵] سوره و بر باره بار (و ۵) سوره سوره
است در هر یک مقدار صیغین، نقلی است مانند سوره سوره

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \Rightarrow \frac{\sin(x) - \sin(c)}{x - c} = \cos(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} = \cos(c) \Rightarrow \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| = |\cos(c)| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\frac{|\sin(\alpha)|}{|\alpha|} \leq 1 \Rightarrow |\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$$

مطرحه براس ۲۰ نیز را خطه ایالات می شود.

حیدرول نسبیراں صلیبی، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
$\cot$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0

کاترینہ